Zbornik radova 10. Međunarodne konferencije o nastavi fizike u srednjim školama,
Aleksinac, 24-26. mart 2023.

Vizualizacija u procesu rešavanja računskih zadataka

Milan S. Kovačević[1], Miroslav Jovanović[2,3]

Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Kragujevcu, Srbija
[2]Gimnazija „Josif Pančić", Bajina Bašta
[3]Tehnička škola, Bajina Bašta

Apstrakt. U nastavi fizike, rešavanje zadataka je vaoma značajno za razvijanje logičkog mišljenja kod učenika, i podrazumeva primenu stečenog znanja. Iskustvo govori o tome da učenici neretko imaju poteškoća sa zadacima iz fizike. Često od učenika čujemo *"Znam teoriju, ali ne razumem zadatke!"*. Jedan razlog može biti i taj što je proces rešavanja zadataka vrlo kompleksan i zahteva od učenika razmišljanje i povezivanje znanja. Ne postoji univerzalno uputstvo, ali svakako jedan od važnih koraka u prevazilaženju teškoća u ovom procesu jeste i vizualizacija. Generalno, vizualizacija podrazumeva zamisliti, nacrtati sliku, dijagram ili grafik. Međutim, u ovom radu, poseban akcenat se stavlja na vizualizaciji kroz eksperiment koji prati rešavanje računskih zadataka. Ovaj način vizualizacije se pokazao kao vrlo efikasan "alat", posebno kada je reč o proveri dobijenog rezultata, odnosno njegovoj fizičkoj interpretaciji i proveri njegovog smisla, jednice, predznaka itd. Ovo je prezentovano na nekoliko primera iz mehanike, zakona održanja energije, oscilacija i dr. Koncept iznet u ovom radu otvara put novim istraživanjima koja bi ispitivala uticaj predloženog pristupa na proces učenja i sticanja znanja iz fizike. Takva istraživanja bi omogućila uvođenje efikasnijih, vizualnih strategija učenja ne samo u nastavi fizike već i drugih prirodnih nauka.

Ključne reči: računski zadaci, eksperiment, trenje, sila, energija, brzina, oscilacije.

OPŠTE METODIČKE NAPOMENE U REŠAVANJU RAČUNSKIH ZADATAKA IZ FIZIKE

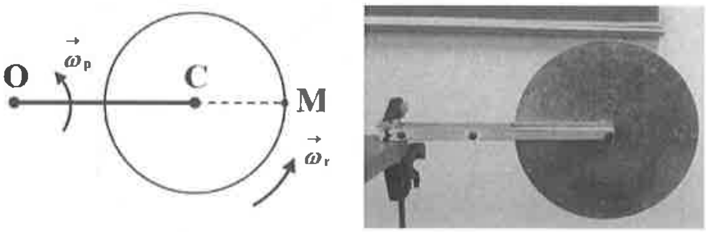
Racionalnom metodikom rešavanja zadataka iz fizike mogu se postići izvanredni rezultati u razvijanju logičkog i kritičnog mišljenja kod učenika. Rešavanje zadataka može da se koristi pri izlaganju novog gradiva, pri utvrđivanju gradiva, pri izvođenju frontalnih ili grupnih laboratorijskih vežbi, a često mogu da posluže kao osnovno sredstvo pomoću kojeg nastavnik proverava stečeno znanje učenika. Posebno treba obratiti pažnju na sledeće zahteve: (a) izbor zadataka; (b) metodički postupak pri rešavanju zadataka; (c) pedagoško-metodičke napomene pri radu. Prilikom izbora zadataka iz fizike treba voditi računa da se iskoriste odgovarajući zadaci iz udžbenika i priručnika za fiziku što odgovara opštim zahtevima za organizaciju nastave fizike. Odabrani zadaci treba da odgovaraju psihofizičkom uzrastu učenika i da budu sortirani prema stepenu složenosti, odnosno od jednostavnijih ka složenijim.

Pri rešavanju zadataka treba voditi računa o sledećim pravilima: (1) Pošto se pročita zadatak i shvati njegov smisao, treba zapisati sve fizičke zakone i definicije koje on sadrži. (2) Na osnovu prethodnog razmišljanja potrebno je napisati zadate podatke i označiti one veličine koje se traže. Zatim je potrebno, ako je to moguće, skicirati sliku zadatka i na njoj označiti sve veličine koje su zadate i koje se traže. (3) Tek nakon prvog i drugog koraka postavlja se jednačina, ili više njih, koje interpretiraju zakone fizike, čije rešavanje vodi pronalaženju rezultata. (4) Radi jednostavnije matematičke interpretacije, kada je to moguće, treba uvesti olakšavajuće pretpostavke tzv. aproksimacije. (5) Jednačine treba rešavati u opštem obliku, jer se tako izbegavaju glomazne numeričke operacije i smanjuje verovatnoća pojave računskih grešaka. Osim toga, jedino analizom opšteg rešenja mogu se predvideti sve mogućnosti zadatka i njegov fizički smisao. (6) U opštem rešenju figurišu samo oznake onih fizičkih veličina čije su brojne vrednosti zadane, kao i oznake poznatih fizičkih konstanti. (7) Pre nego što se izvrši zamena zadanih brojnih vrednosti i kostanti neophodno je uskladiti jedinice ovih veličina, odnosno treba ih izraziti u istom sistemu jedinica.

U ovom radu, na nekoliko primera iz mehanike, zakona održanja energije, oscilacija i sl. [2, 3], prezentovana je vizualizacija kroz eksperiment koji prati rešavanje datog zadatka. Koncept se može proširiti i na druge primere, što zahteva izradu i upotrebu nekih drugih nastavnih sredstava u skladu sa problemom koji se rešava u datom zadatku. Više detalja o nastavi fizike i primeni demonstracionih ogleda nalazimo u ref. [1, 4, 5].

VIZUALIZACIJA KROZ EKSPERIMENTE: ODABRANI PRIMERI

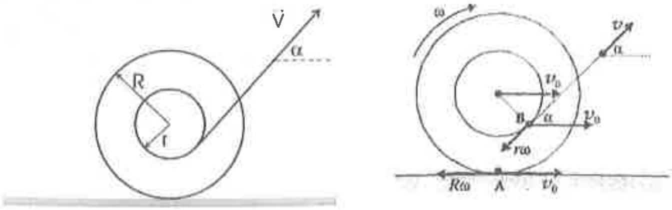
Primer 1: Štap OC, dužine 2*r*, je jednim svojim krajem vezan za nepokretnu tačku O zgloba a drugim krajem čvrsto spojen za osovinu oko koje rotira disk C poluprečnika *r*. Oba tela istovremeno rotiraju u vertikalnoj ravni. Štap slobodno rotira konstantnom ugaonom brzinom ω_p oko ose koja prolazi kroz tačku O zgloba i normalna je na ravan u kojoj se štap nalazi. Disk slobodno rotira konstantnom ugaonom brzinom ω_r oko ose koja prolazi kroz tačku C i normalna je na ravan u koj se disk nalazi. Odrediti brzinu tačke M diska u položaju prikazanom na slici 1.



SLIKA 1. Štap i disk koji istovremeno rotiraju oko tačaka O i C respektivno.

Na slici 1 (desno) data je fotografija demonstraciong eksperimenta koji prati rešavanje datog zadatka. Nakon realizacije demonstracionog ogleda je očigledno da postoji njegov značajan uticaj na uspeh u rešavanju ovog zadatka. Brzina tačke M diska se može naći kao zbir brzina usled rotacije diska i usled rotacije štapa OC: $v_M = \omega_r r + \omega_p OM = r(\omega_r + 3\omega_p)$.

Primer 2: Na osovinu kalema, poluprečnika *r*, namotana je neistegljiva nit koja se vuče konstantnom brzinom *v*, pod uglom α prema horizontali. Pri tome se kalem kotrlja po podlozi bez klizanja. Poluprečnik kalema je *R*. Pri kojim vrednostima ugla α se kalem kreće a) udesno; b) ulevo? Smatrati da između niti i kalema nema proklizavanja.



SLIKA 2. Primer kotrljanja kotura bez proklizavanja [2].

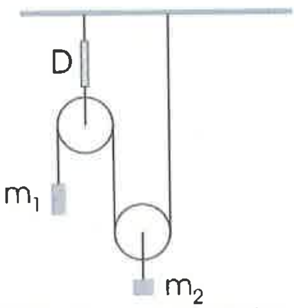
Pretpostavimo da se kotur (kalem) kreće s leva na desno brzinom v_0 (slika 2). Tada kotur rotira oko svoje ose u smeru kazaljke na satu ugaonom brzinom ω. Ako nema proklizavanja, brzina tačke A je nula, tj. $v_0 = R\omega$ odakle se nalazi $\omega = v_0/R$. Kako nit ne proklizava, to je projekcija brzine tačke B na pravac niti jednaka brzini niti, tj. $v_0 \cos\alpha - r\omega = v$ odakle nalazimo brzinu kotura $v_0 = v/(\cos\alpha - r/R)$. Da bi se kotur kretao u pretpostavljenom smeru (s leva na desno) treba da bude ispunjen uslov $v_0 > 0$, a to je ekvivalentno sa $\cos\alpha < r/R$, tj. $\alpha_c = \cos^{-1}(r/R)$.

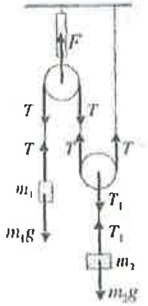
SLIKA 3. Demonstracioni ogled sa koturom.

Na slici 3 je prikazan demonstracioni ogled koji smo realizovali sa kalemom malog poluprečnika r=9 cm i velikog poluprečnika R=30 cm. Najpre se povlačenjem konca u horizontalnom pravcu pokazuje da se kotur zaista kreće s leva na desno. Postepenim povećavanjem ugla α, nalazi se granična vrednost ovog ugla, koji za naš kotur iznosi α_c=72,5^0. Interesantno je primetiti da kada se konac vuče pod uglom koji je baš jednak α_c, kotur miruje. Daljim povećavanjem ugla α tj. za $\alpha > \alpha_c$, kotur počinje da se kreće u smeru s desna na levo.

Primer 3: Naći silu koju pokazuje dinamometar u sistemu priazanom na slici. Mase tela su m_1=100 g i m_2=300 g , a mase kotura i neistegljivih niti su zanemarljive.

Na slici 4 su prikazane sile koje deluju na tegove i koture (T i T_1 su sile zatezanja niti, a F je elastična sila dinamometra). Kako gornji kotur miruje (a i masa mu je zanemarljiva) to je sila koju pokazuje dinamometar $F=2T$. Neka su a_1 i a_2 ubrzanja tegova m_1 i m_2 respektivno. Sila zatezanja se može odrediti pomoću dinamičkih zakona kretanja tegova i desnog kotura.





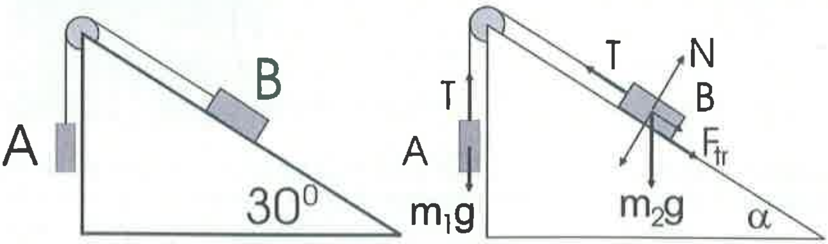
SLIKA 4. Skica postavke zadatka i skica uz rešenje zadatka [2].

Jednačina kretanja korura je $ma_2 = T_1 - 2T$. Pošto je uslov u zadatku da je m=0, to je T_1=2T. Zakoni kretanja tegova su: $m_1 a_1 = T - m_1 g$ i $m_2 a_2 = m_2 g - 2T$. Ovim su dobijene tri jednačine sa tri nepoznate (a_1, a_2 i T). Pošto je nit neistegljiva, dužina niti za koju je vezan teg m_1 je konstantna, što znači da ako se desni teg spusti za neko rastojanje Δs, levi se mora podići za $2\Delta s$. Odavde se dobija da je odnos ubrzanja tegova isti kao i odnos puteva koje tegovi pređu za isto, beskonačno malo, vreme, tj. a_1=2a_2. Tada se zakoni kretanja svode na: $2m_1 a_2 = T - m_1 g$ i $m_2 a_2 = m_2 g - 2T$. Odavde se jednostavnom algebrom dobija $2m_1/m_2 = (T - m_1 g)/(m_2 g - 2T)$, odakle lako nalazimo $T = 3m_1 m_2 g/(m_2 + 4m_1)$, odnosno $F = 2T = 6m_1 m_2 g/(m_2 + 4m_1)$.

U eksperimentu prikazanom na slici 5, mase tegova su: m_1=98,34 g i m_2=197 g. Primenom formule za silu F nalazimo vrednost 1,83 N. Pokazivanje dinamometra u eksperimentu sa slike 5 je 2,1 N. Neslaganje između izračunate i vrednosti za silu F koju pokazuje dinamometar uzrokovano je pre svega masama koturova (oba kotura), koje u ovom eksperimentu nisu zanemarljive. Pokazalo se da je ova demonstracija veoma efikasna pre svega sa aspekta fizičke interpretacije rezultata i provere njegovog fizičkog smisla.

SLIKA 5. Demonstracioni ogled uz zadatak.

Primer 4: oeficijent trenja između tela B i strme ravni je μ (slika). Pri kom odnosu masa tela A i B će se telo B: a) spuštati; b) podizati.



SLIKA 6. Skica postavke zadataka i skica uz rešenje zadataka.

Neka se telo A kreće naniže. Tada je

$$m_1 a = m_1 g - T \text{ i } m_2 a = T - \frac{1}{2} m_2 g - \mu m_2 g \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rešavanjem ovih jednačina, lako se nalazi da je ubrzanje sistema

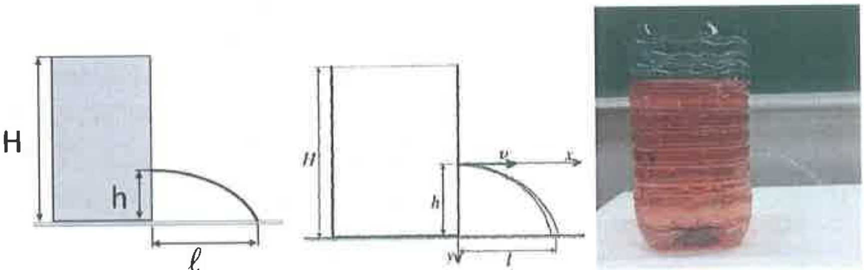
$$a = \frac{(2m_1 - m_2 - \mu m_2 \sqrt{3}) g}{2(m_1 + m_2)}.$$

Ako je pretpostavka o smeru kretanja tela A naniže tačna, dobijeni rezultat mora imati pozitivnu vrednost, tj. $a>0$, odnoso $2m_1 > m_2(1+\mu\sqrt{3})$. Odavde se lako nalazi da je traženi odnos masa tela A i B: $m_1/m_2 > (1+\mu\sqrt{3})/2$. Slično se rešava zadatak uz pretpostavku da je smer kretanja tela A naviše.

SLIKA 7. Demonstracioni ogled uz zadatak sa strmom ravni.

Na slici 7 je prikazana strma ravan sa dva tela (u zadatku označena sa A i B) koja su preko kotura povezana neistegljivim koncem. Postepenim dodavanjem tegova na tas koji visi (u zadatku je ovo telo A) može se odrediti masa tela m_1 pri kojoj će telo B (drveni kvadar) početi da se kreće u smeru uz strmu ravan. Prethodno je određen koeficijent trenja klizanja koji u ovom ogledu iznosi 0,27. Masa tela B je 270,6 g. U eksperimentu je određena masa tela A, m_1=200 g što je približno masi koja se dobija primenom formule $m_1/m_2 > (1+\mu\sqrt{3})/2$. Za slučaj mase m_2=270,6 g daje m_1=198,6 g.

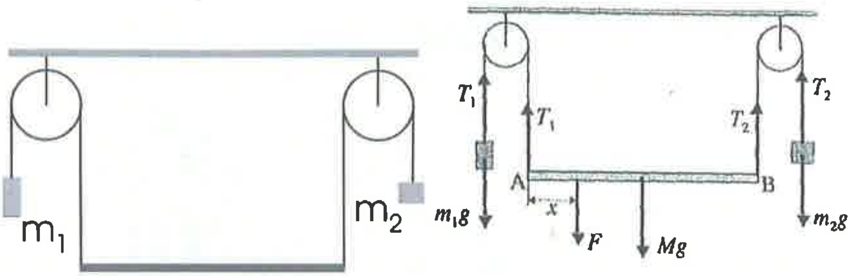
Pimer 5: Na stolu leži širok otvoren cilindrični sud do vrha napunjen vodom. Visina suda je *H* (slika). Na kojoj visini od dna suda treba da se nalazi mali otvor da bi domet mlaza vode koji iz njega izlazi bio maksimalan?



SLIKA 8. Demonstracioni ogled i skica uz rešenje zadatka sa sudom iz koga izlazi mlaz vode.

Mlaz vode iz suda ima brzinu $v=\sqrt{2g(H-h)}$. Kretanje mlaza se odvija prema zakonima horizontalnog hica. Ako je t vreme kretanja vode od izlaska iz suda do pada na sto, tada je: $l = vt$ i $h=gt^2/2$, odakle se lako dobija za domet $l=2\sqrt{h(H-h)}$. Kako je $h+(H-h)=const$ sledi da će domet mlaza vode biti maksimalan ako je $h=H-h$, odnosno $h=H/2$. Pomoću demonstracionog eksperimenta prikazanog na slici 8 se pokazuje da se maksimalni domet l_{max} dobija za $h=H/2$ što je u saglasnosti sa rešenjem.

Primer 6: Homogena greda mase 5 kg i dužine 1 m obešena je na krajevima pomoću neistegljivih konopaca prebačenih preko koturova kao na slici. Na drugim krajevima konopaca obešeni su tegovi masa m_1=8 kg i m_2=3 kg. Kolikom silom i u kojoj tački treba delovati na gredu da bi ona bila uravnotežena u horizontalnom položaju?



SLIKA 9. Postavka zadatka i skica uz rešenje [2].

Na slici 9 su prikazane sile koje deluju na gredu i tegove. Uslovi ravnoteže tegova i grede respektivno su: $T_1 = m_1 g$, $T_2 = m_2 g$ i $T_1 + T_2 = F + Mg$. Odavde sledi $F = T_1 + T_2 - Mg$, odnosno$F = (m_1 + m_2 - M)g$. Položaj napadne tačke sile F može se odrediti iz uslova ravnoteže momenata sila. Ako napišemo ovaj uslov ravnoteže u odnosu na tačku A, imamo: $Fx + Mg\frac{l}{2} = T_2 l$. Odavde nalazimo $x = (2T_2 - Mg)l/2F = (2m_2 - M)l/\big(2(m_1 + m_2 - M)\big)$.

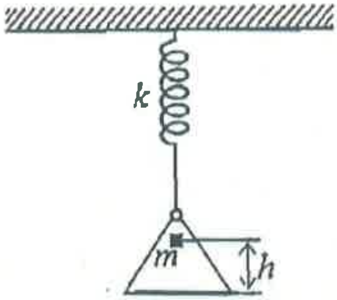
SLIKA 10. Demonstracioni ogled sa ravnotežom grede.

Na slici 10 je prikazan ogled sa kojim se može vizualizovati rešavanje opisanog zadatka. U našem eksperimentu greda dužine ima masu M=81 g. Mase tegova su m_1=42,15 g i m_2=41,63 g. Teg sa kojim smo uravnotežavali gredu ima masu 1,25 g (što odgovara težini od 0,012 N). Dužina grede u eksperimentu je l=33,5 cm. U eksperimentu sa slike, vrednost sile F je unapred zadata, tako da traženi položaj napadne tačke sile F koja uravnotežava gredu se nalazi iz formule

$$x = (2T_2 - Mg)l/2F$$

Primer 7: Na tas, obešen za oprugu koeficijenta elastičnosti k, padne teg mase m sa visine h (slika). Sudar je apsolutno neelastičan. Odrediti amplitudu oscilovanja tasa, nakon sudara. Masa tasa i otpor sredine su zanemarljivi.

U početnom položaju (dok teg nije na tasu), opruga je izdužena za veličinu l_0 koju nalazimo iz jednačine kl_0=m_0g, gde je m_0 masa tasa. Ova masa je po uslovu zadataka zanemarljiva, odakle sledi da je i deformacija opruge zanemarljiva. Nakon neelastičnog sudara tega sa tasom, tas kreće naniže brzinom v, koja se dobija iz uslova zakona održanja imlulsa: $m\sqrt{2gh} = (m + m_0)v$ odakle se nalazi $v = \sqrt{2gh}$.



SLIKA 11. Skica uz zadatak i fotografija eksperimenta sa elastičnom oprugom [3].

U novom ravnotežnom položaju sistema, opruga će biti izdužena za l_1: $mg = kl_1$ odnosno $l_1 = mg/k$. U najnižem položaju, opruga će biti deformisana za l_2 što nalazimo iz zakona održanja energije $mv^2/2 + mgl_2 = kl_2^2/2$ odakle nalazimo da je traženo izduženje$l_2 = (mg/k)\left(1 + \sqrt{1 + 2kh/mg}\right)$. Amplituda oscilovanja je: $x_0 = l_2 - l_1$.

Na slici 11 je prikazan i demonstracioni eksperiment sa elastičnom oprugom. Dužina neopterećene opruge je 14c m. Za razliku od uslova zadatka, u našem eksperimentu masa tasa nije zanemarljiva, i iznosi 49,9 g. Teg mase 48,26 g pusti se da slobodno pada sa visine 6cm. U novom ravnotežnom položaju sistema, dužina istegnute opruge je 19 cm. U najnižem položaju opruga je deformisana, i ukupna dužina istegnute opruge iznosi 23,5 cm.

ZAKLJUČAK

Nastava fizike se ne može zamisliti bez obrade računskih zadataka. Međutim, iskustvo pokazuje da učenici neretko imaju velikih poteškoća sa primenom osnovnih koncepata pri rešavanju zadataka. Zato se u ovom radu poseban akcenata stavlja na vizualizaciji kroz eksperiment koji prati rešavanje datog problema. Ovaj vid vizualizacije predstavlja važan korak u rešavanju zadataka iz fizike, koji u značajnoj meri olakšava ovladavanje osnovim zakonima i konceptima fizike.

LITERATURA

1. Lj. Nešić, Poglavlja metodike nastave fizike, Univerzitet u Nišu, PMF Niš, 2015.
2. N. Čaluković, M. Raspopović, Fizika 1M, Krug, Beograd 2012.
3. N. Čaluković, M. Raspopović, Fizika 3M, Krug, Beograd 2012.
4. J. Dojčilović, S. Ivković, Eksperimenti i demonstracioni ogledi iz fizike I, II, Beograd 2007.
5. В. А. Буров, Б.С. Зворыкин, А. П. Кузмин, А. А. Покровский, И. М. Румянцев, Демонстрационний експеримент по физике в средней школе 1,2, Издатељство, "Просвещение" 1978.